Matematika 2 – java e njëmbëdhjetë

Seminaret

1. Tek zbërthimi i binomit $(x + \frac{1}{x})^n$, koeficienti i anëtarit të tretë është për 35 më i madh se koeficienti i anëtarit të dytë. Të gjendet anëtari i cili nuk e përmban faktorin x.

2. Tek zbërthimi i binomit $(x + y)^n$, anëtari i dytë është i barabartë me 240, anëtari i tretë është i barabartë me 720 dhe anëtari i katërt është i barabartë me 1080. Të gjenden numrat x, y dhe n.

3. Shuma e koeficientëve të anëtarit të parë, të dytë dhe të tretë tek zbërthimi i binomit $(x^3 + \frac{1}{x^2})^n$ është e barabartë me 11. Të gjendet anëtari i zbërthimit që përbëhet nga prodhimi i një numri të fiksuar real me faktorin x^2.

Zgjidhjet

1. Tek zbërthimi i binomit

$$(x + \frac{1}{x})^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot (\frac{1}{x})^2 + \cdots + \binom{n}{n}(\frac{1}{x})^n$$

koeficienti i anëtarit të tretë është $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, ndërsa koeficienti i anëtarit të dytë është $\binom{n}{1} = n$. Nga këtu kemi ekuacionin:

$$\frac{n(n-1)}{2} = n + 35 \Leftrightarrow n^2 - n = 2n + 70 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0 \Leftrightarrow n_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 70}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{3 \pm \ 17}{2} \Rightarrow n_1 = 10 \text{ ose } n_2 = -7. \text{ Por } n \in \mathbb{N}, \text{ prandaj } n = n_1 = 10.$$

Anëtari i përgjithshëm tek zbërthimi i binomit $(x + \frac{1}{x})^{10}$ është

$$\binom{10}{k}x^{10-k} \cdot (\frac{1}{x})^k = \binom{10}{k} \cdot x^{10-2k}$$

Duhet të jetë $10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$ që të eleminohet faktori x nga anëtari i binomit. Pra anëtari i kërkuar është $\binom{10}{5}x^0 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$.

2. Nga zbërthimi i binomit:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}y}_{\text{anëtari i dytë}} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}y^2}_{\text{anëtari i tretë}} + \underbrace{\binom{n}{3}x^{n-3}y^3}_{\text{anëtari i katërt}} + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

formohet sistemi i ekuacioneve: $\begin{cases} nx^{n-1}y = 240 \\ \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 = 720 \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^{n-3}y^3 = 1080 \end{cases}$.

Duke pjestuar ekuacionin e parë me ekuacionin e dytë të sistemit (anë për anë) formojmë barazimin $\frac{x}{y} = \frac{n-1}{6}$ dhe duke pjestuar ekuacionin e dytë me ekuacionin e tretë (anë për anë) na del që $\frac{x}{y} = \frac{2(n-2)}{9}$. Nga dy barazimet e fundit kemi:

$$\frac{n-1}{6} = \frac{2(n-2)}{9} \Leftrightarrow 3n-3 = 4n-8 \Leftrightarrow n = 5.$$

Duke zëvendësuar $n = 5$ tek ekuacionet e mësipërme do kemi sistemin: $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ 5x^4y = 240 \end{cases}$.

Shumëzojmë dy barazimet e sistemit (anë për anë) dhe fitojmë $5x^5 = 160 \Leftrightarrow x^5 = 32 \Leftrightarrow x = 2$. Nga këtu $\frac{2}{y} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = 3$.

3. Shuma e koeficientëve të anëtarit të parë, të dytë dhe të tretë tek një zbërthim i çfarëdoshëm i binomit është $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$. Kështu formohet ekuacioni:

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 11 \Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 22 \Leftrightarrow n^2 + n = 20 \Leftrightarrow n(n+1) = 4\cdot 5.$$

Nga këtu rrjedh që $n = 4$ është e vetmja zgjidhje sepse funksioni $n \to n(n+1)$ është rreptësisht rritës.

Anëtari i përgjithshëm i zbërthimit të binomit $(x^3 + \frac{1}{x^2})^4$ është

$$\binom{4}{k}(x^3)^{4-k}\cdot(\frac{1}{x^2})^k = \binom{4}{k}\cdot\frac{x^{12-3k}}{x^{2k}} = \binom{4}{k}\cdot x^{12-5k}$$

Tek anëtari i kërkuar duket të figurojë x^2 prandaj do kemi $12 - 5k = 2 \Leftrightarrow k = 2$.

Kështu anëtari i kërkuar do jetë $\binom{4}{2}\cdot x^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}x^2 = 6x^2$.

Matematika 2 – Kolokvijum I - model

1. Vërtetoni që katrori i një numri natyror nuk mund të paraqitet në formën $9n - 1$, ku $n \in \mathbb{N}$.

2. Vërtetoni që numri $n+1$, ku $n \in \mathbb{N}, n > 3$, është i thjeshtë atëhërë dhe vetëm atëherë kur $n+1$ nuk është faktor i numrit $n!$.

3. Konvertoni numrat nga sistemi me njërën bazë tek sistemi në bazën tjetër:

(a) $(ACC)_{14} \longrightarrow (\qquad)_7$

(b) $(111011)_3 \longrightarrow (\qquad)_7$

(c) $(1DA)_{20} \longrightarrow (\qquad)_{23}$

4. Të gjenden shifrat u, v të numrit $34uv5v$ ashtu që ky numër të plotpjestohet me 36. (Shqyrtoni të gjitha rastet)

Zgjidhjet:

1. Numri $9n-1$ është i formës $3k+2$ sepse $9n-1 = 3(3n)-1 = 3(3n-1)+2$, pra $k = 3n-1$. Numrat e formës $3k+2$ nuk janë katrorë të plotë sepse mbetja gjatë pjestimit me numrin 3, e një katrori të plotë, mund të jetë vetëm 0 ose 1.
Kjo vlen sepse çdo numër natyror ka formën $3l$ ose $3l+1$ ose $3l+2$.

1. Për numrin $3l$ kemi $(3l)^2 = 9l^2 = 3(3l^2) + 0$, pra mbetja është 0.
2. Për numrin $3l+1$ kemi $(3l+1)^2 = 9l^2 + 6l + 1 = 3(3l^2 + 2l) + 1$, pra mbetja është 1.
3. Për numrin $3l+2$ kemi $(3l+2)^2 = 9l^2 + 12l + 4 = 3(3l^2 + 4l + 1) + 1$, pra mbetja është 1.

2. Në qoftë se numri $n+1$ është i thjeshtë atëherë ai nuk ka asnjë faktor të përbashkët (më të madh se 1) me secilin nga numrat $1, 2, \cdots, n$. Nga kjo rrjedh që numri $n+1$ nuk ka asnjë faktor të përbashkët (më të madh se 1) me numrin $1 \cdot 2 \cdots \cdot n = n!$. Kjo implikon që numri $n!$ nuk plotpjestohet nga numri $n+1$.

Anasjelltas, supozojmë tani që numri $n!$ nuk plotpjestohet nga numri $n+1$. Në qoftë se numri $n+1$ nuk është i thjeshtë atëherë ky numër mund të paraqitet si prodhim $u \cdot v$ ku $2 \leqslant u, v \leqslant n$. ***Dallojmë dy raste për numrat*** u ***dhe*** v:

1. ***Ekzistojnë numrat*** u ***dhe*** v ***ashtu që*** $u \neq v$. Në këtë rast u dhe v përmbahen tek prodhimi $1 \cdot 2 \cdots\ u \cdots v \cdots \cdot n = n!$ prandaj numri $n+1 = uv$ do jetë faktor i numrit $n!$. Kjo bie në kundërshtim me supozimin që numri $n!$ nuk plotpjestohet nga numri $n+1$.

2. ***Nuk ekzistojnë numrat*** u ***dhe*** v ***ashtu që*** $u \neq v$. Në këtë rast do jetë $n+1 = p^2$, ku p është numër i thjeshtë. Numri p do jetë faktor i prodhimit $1 \cdot 2 \cdots \cdot n = n!$ sepse $p \leqslant p^2 - 1 = n$ meqënëse $p \geqslant 2$. Madje për $p \geqslant 3$ vlen edhe mosbarazimi $2p \leqslant p^2 - 1 = n$ sepse $2p \leqslant p^2 - 1 \Leftrightarrow p^2 - 2p + 1 \geqslant 2 \Leftrightarrow (p-1)^2 \geqslant 2$. Kështu për $p \geqslant 3$ numrat p dhe $2p$ figurojnë tek prodhimi $1 \cdot 2 \cdots \cdot n = n!$ dhe nga këtu kemi që numri $p^2 = n+1$ është faktor tek prodhimi $1 \cdot 2 \cdots \cdot n = n!$. Kjo bie në kundërshtim me supozimin që numri $n!$ nuk plotpjestohet nga numri $n+1$.
   Situata kur $p = 2$ implikon $n+1 = p^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow n = 3$ që është rast i përjashtuar nga shqyrtimet meqënëse kemi kushtin $n > 3$.

Kontraditat e mësipërme implikojnë që numri $n+1$ është i thjeshtë.

3. Për secilin rast algoritmi i zgjidhjes është i njëjtë, pra në fillim do kalojmë paraqitjet e numrit nga sistemi me bazë të dhënë në sistemin me bazën 10 dhe më pas do bëjmë kalimin nga paraqitja në sistemin me bazë 10 tek paraqitja e numrit në sistemin me bazën e kërkuar.

(a) $(ACC)_{14} = A \cdot 14^2 + C \cdot 14 + C = 10 \cdot 196 + 12 \cdot 14 + 12 = 1960 + 168 + 12 = 2140.$

$k_0 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 7^k \leqslant 2140\} = 3 \Rightarrow b_0 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 7^{k_0} \leqslant 2140\} = 6 \Rightarrow b_0 \cdot 7^{k_0} = 2058$

$k_1 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 7^k \leqslant 2140 - 2058\} = 2 \Rightarrow b_1 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 7^{k_1} \leqslant 82\} = 1 \Rightarrow b_1 \cdot 7^{k_1} = 49$

$k_2 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 7^k \leqslant 82 - 49\} = 1 \Rightarrow b_2 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 7^{k_2} \leqslant 33\} = 4 \Rightarrow b_2 \cdot 7^{k_2} = 28$

Meqënëse $33 - 28 = 5 < 7$ dhe $k_2 = 1$ do kemi që shifra e fundit do jetë $b_3 = 5$.

Përfundimisht paraqitja e kërkuar është $(b_0 b_1 b_2 b_3)_7 = (6145)_7$.

(b) $(111011)_3 = 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 = 243 + 81 + 27 + 3 + 1 = 355.$

$k_0 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 7^k \leqslant 355\} = 3 \Rightarrow b_0 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 7^{k_0} \leqslant 355\} = 1 \Rightarrow b_0 \cdot 7^{k_0} = 343$

$k_1 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 7^k \leqslant 355 - 343\} = 1$. Meqënëse $k_0 - k_1 = 2$ kemi $b_1 = 0$ dhe
$b_2 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 7^{k_1} \leqslant 12\} = 1 \Rightarrow b_2 \cdot 7^{k_1} = 7$

Meqënëse $12 - 7 = 5 < 7$ dhe $k_1 = 1$ do kemi që shifra e fundit do jetë $b_3 = 5$.

Përfundimisht paraqitja e kërkuar është $(b_0 b_1 b_2 b_3)_7 = (1015)_7$.

(c) $(1DA)_{20} = 1 \cdot 20^2 + D \cdot 20 + A = 1 \cdot 400 + 13 \cdot 20 + 10 = 400 + 260 + 10 = 670.$

$k_0 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 23^k \leqslant 670\} = 2 \Rightarrow b_0 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 23^{k_0} \leqslant 670\} = 1 \Rightarrow b_0 \cdot 23^{k_0} = 529$

$k_1 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 23^k \leqslant 670 - 529\} = 1 \Rightarrow b_1 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 23^{k_1} \leqslant 141\} = 6 \Rightarrow$

$b_1 \cdot 23^{k_1} = 138$

Meqënëse $141 - 138 = 3 < 23$ dhe $k_1 = 1$ do kemi që shifra e fundit do jetë $b_2 = 3$.

Përfundimisht paraqitja e kërkuar është $(b_0 b_1 b_2)_{23} = (163)_{23}$.

4. Që të plotpjestohet një numër me 36, duhet dhe mjafton e që ai numër të plotpjestohet me 4 dhe me 9.

Numri natyror (që ka të paktën dy shifra) plotpjestohet me 4 atëherë dhe vetëm atëherë kur numri që përbëhet nga dy shifrat e fundit të tij, plotpjestohet me 4. Në rastin konkret kemi numrin $34uv5v$ që plotpjestohet me 4, prandaj duhet dhe mjafton që numri dyshifror $5v$ të plotpjestohet me 4. Kjo është e mundur atëherë dhe vetëm atëherë kur $v = 2$ ose $v = 6$.

Plotpjestueshmëria me 9 e numrit $34uv5v$ implikon kushtin ekuivalent që numri $3 + 4 + u + v + 5 + v = 12 + u + 2v$ plotpjestohet me 9.

Për $v = 2$ kemi kushtin $12 + u + 4 = 16 + u$ plotpjestohet me 9 nga ku del se $u = 2$.Kështu njëra zgjidhje do jetë numri 342252.

Për $v = 6$ kemi kushtin $12 + u + 12 = 24 + u$ plotpjestohet me 9 nga ku del se $u = 3$.Kështu zgjidhja tjetër do jetë numri 343656.